PROBLEMA 1. La transformada de Laplace de un sistema LTI descrito mediante ecuaciones diferenciales viene dada por la siguiente expresión:

$$H(s) = \frac{2s+5}{s+2}$$

a) Determinar la ecuación diferencial que describe el sistema.

Como el sistema es LTI sabemos que:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Expresamos la salida en el dominio de Laplace:

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

Luego la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s+5}{s+2}$$

Podemos escribir:

$$Y(s)\,[s+2] = X(s)\,[2s+5]$$

$$s\,Y(s) + 2\,Y(s) = 2s\,X(s) + 5\,X(s)$$

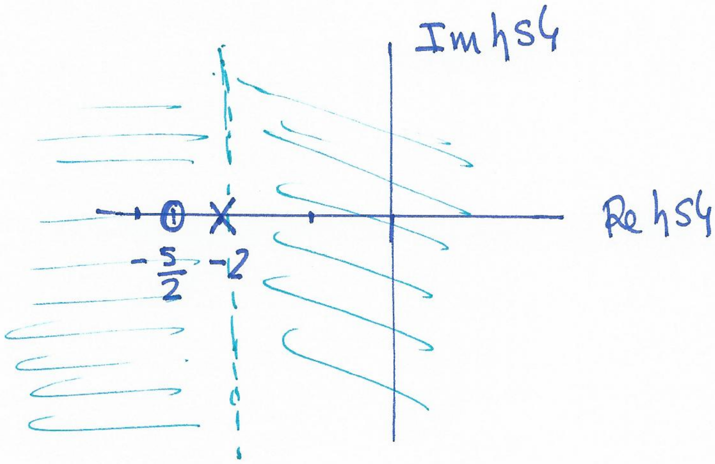
y en el dominio del tiempo:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2\frac{dx(t)}{dt} + 5\,x(t)$$

que es la ecuación diferencial de coeficientes ctes.

b) Suponiendo que el sistema es estable, calcular la respuesta al impulso h(t).

Representamos H(s) en el diagrama de polos y ceros



$$H(s) = \frac{2s+5}{s+2}$$

O : $2s+5=0 \rightarrow s=\frac{-5}{2}$

X : $s+2=0 \rightarrow s=-2$

Puesto que H(s) tiene un polo en $s=-2$, por las propiedades de la región de convergencia sabemos que:

$$ROC\{H(s)\} \begin{cases} Re\{s\} > -2 \quad (*) \\ Re\{s\} < -2 \end{cases}$$

Sabemos que el sistema es estable, luego la ROC debe contener al eje-$j\omega$ ($\sigma=0$) por lo que:

$$H(s) = \frac{2s+5}{s+2}, \quad Re\{s\} > -2$$

ORDEN N(S) = orden D(S)

$$\begin{array}{r|l} 2s+5 & s+2 \\ \hline -2s-4 & 2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\frac{2s+5}{s+2} = 2 + \frac{1}{s+2}$$

Luego

$$H(s) = \frac{2s+5}{s+2} = 2 + \frac{1}{s+2} \quad , \; Re\{s\} > -2$$

y por la propiedad de linealidad y teniendo en cuenta que conocemos la transformada inversa de cada uno de los sumandos (ver tablas):

$$h(t) = 2\,\delta(t) + e^{-2t}\,u(t)$$

c) Obtener la salida del sistema cuando la entrada es $x(t) = e^{-t}u(t)$ y se sigue considerando el sistema estable

Expresamos $x(t)$ en el dominio transformado:

$$x(t) = e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s+1} \quad , \; Re\{s\} > -1$$

Ya hemos dicho que:

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

$$R_Y \supset R_X \cap R_H$$

Calculamos $Y(s)$:

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{2s+5}{s+2} =$$

$$= \frac{1}{s+1} \cdot \left(2 + \frac{1}{s+2}\right) = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$A = \frac{1}{(s+1)(s+2)}(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{s+2}\Big|_{s=-1} = 1$$

$$B = \frac{1}{(s+1)(s+2)}(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{1}{s+1}\Big|_{s=-2} = -1$$

Luego la transformada de $y(t)$ es:

$$Y(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

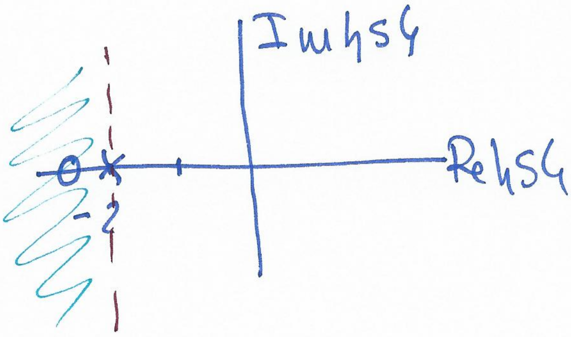
y por tanto:

$$y(t) = 2e^{-t}u(t) + e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) =$$
$$= 3e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

d) Para la misma entrada calcular la salida del sistema si éste ahora es anticausal.

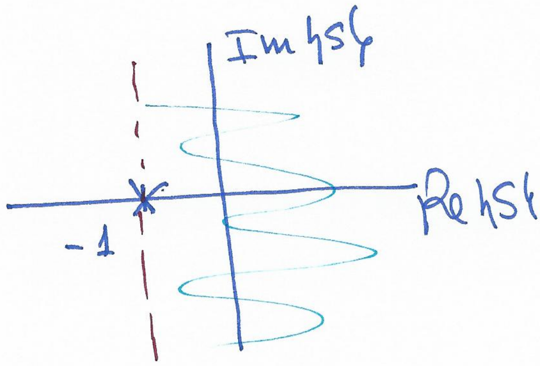
sistema anticausal: región de convergencia a la izqda del polo más a la izqda

$$H(s) = \frac{2s+5}{s+2}, \quad Re\{s\} < -2$$



La entrada era:

$$X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad Re\{s\} > -1$$



y hemos dicho que:

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s), \quad R_Y \supset R_X \cap R_H$$

Vemos que no existe solapamiento entre las regiones de convergencia de $X(s)$ y de $H(s)$ luego la salida no va a converger en el dominio de Laplace para ningún valor de s, así que no podemos calcular $y(t)$ compatible con $x(t)$ y $h(t)$ dadas.

PROBLEMA 2. Un sistema LTI causal y estable está descrito por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 5x(t)$$

a) Calcular la función de transferencia $H(s)$ y la respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ del sistema LTI.

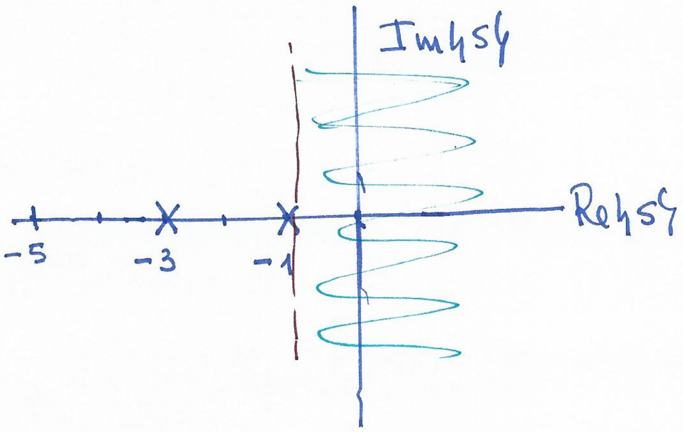
Aplicando las propiedades de derivación y linealidad:

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) = sX(s) + 5X(s)$$

$$Y(s)\left[s^2+4s+3\right] = X(s)\left[s+5\right]$$

Por la propiedad de convolución podemos conocer la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+5}{s^2+4s+3} = \frac{s+5}{(s+1)(s+3)}$$



Causal: ROC a la dch. del polo más a la dch.

Estable: ROC ⊃ eje-$j\omega$ $(\sigma=0)$

Luego $R_H = Re\{s\} > -1$ por ser el sistema causal y estable.

luego $H(s) = \dfrac{s+5}{(s+1)(s+3)}$, $Re\{s\} > -1$

La respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ se obtiene evaluando $H(s)$ en $\sigma = 0$ ó equivalentemente en $s = j\omega$

$$H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{j\omega+5}{(j\omega+1)(j\omega+3)} =$$

$$= \frac{j\omega+5}{-\omega^2+4j\omega+3}$$

b) Calcular la respuesta al impulso $h(t)$:

Hemos visto que:

$$H(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s+3)}, \quad Re\{s\} > -1$$

Realizamos una expansión en fracciones parciales:

$$H(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}, \quad Re\{s\} > -1$$

$$A = H(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = 2$$

$$B = H(s)(s+3)\Big|_{s=-3} = -1$$

luego $H(s) = \dfrac{2}{s+1} - \dfrac{1}{s+3}$, $Re\{s\} > -1$

y por lo tanto podemos obtener $h(t)$:

$$h(t) = 2e^{-t}u(t) - e^{-3t}u(t)$$

c) Calcular la respuesta del sistema si $x(t) = e^{-2t}u(t)$

la salida del sistema se obtiene:

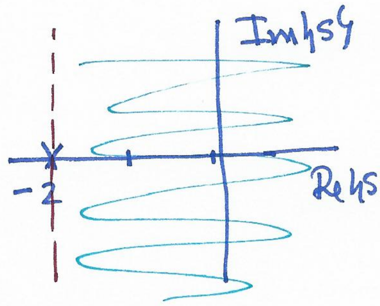
$$y(t) = x(t) * h(t)$$

que en el dominio de Laplace:

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s) \quad , \quad R_Y \supset R_X \cap R_H$$

Calculamos, en primer lugar, $X(s)$

$$X(s) = \frac{1}{s+2} \quad , \quad Re\{s\} > -2$$



Calculamos $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} \cdot \frac{s+5}{(s+1)(s+3)} = \frac{s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad , Re\{s\} > -$$

Para obtener $y(t)$, en primer lugar operamos sobre $Y(s)$ haciendo una expansión en fracciones parciales.

$$Y(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

$$A = Y(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = 2$$

$$B = Y(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = -3$$

$$C = Y(s)(s+3)\Big|_{s=-3} = 1$$

luego $Y(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s+3}$, $\operatorname{Re}\{s\} > -1$

y por tanto:

$$y(t) = 2e^{-t}u(t) - 3e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$$

PROBLEMA 3. La respuesta de un sistema LTI a una entrada escalón unitario viene dada por:

$$y(t) = u(t) - e^{-t}u(t) - te^{-t}u(t)$$

Calcular en función del tiempo la señal de entrada al sistema cuando la salida sea:

$$y(t) = 2u(t) - 3e^{-t}u(t) + 3e^{-3t}u(t)$$

Sabemos que el sistema LTI responde a la entrada escalón unitario con la señal $y(t)$:

$$x(t)=u(t) \longrightarrow \underset{h(t)}{\boxed{\text{LTI}}} \longrightarrow y(t) = u(t) - e^{-t}u(t) - te^{-t}u(t)$$

Si sabemos cómo responde el sistema a una determinada entrada podemos calcular la respuesta al impulso ya que:

$$y(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

y la función de transferencia se obtiene como:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Calculamos, en primer lugar, la transformada de Laplace de $x(t)$ e $y(t)$:

$$x(t) = u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s}, \ \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

Para calcular $Y(s)$ buscamos las transformadas de cada uno de sus términos y luego aplicamos linealidad:

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1}, \ \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

$$t e^{-t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(s+1)^2}, \ \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

Luego

$$y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}, \ \underline{\operatorname{Re}\{s\} > 0}$$

$R_Y \supset R_{Y_1} \cap R_{Y_2} \cap R$

$$Y(s) = \frac{(s+1)^2 - s(s+1) - s}{s(s+1)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{s^2} + 1 + \cancel{2s} - \cancel{s^2} - \cancel{s} - \cancel{s}}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s(s+1)^2}, \ \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

Aplicando la propiedad de convolución hemos visto que

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{s(s+1)^2}}{\frac{1}{s}} = \frac{1}{(s+1)^2}, \ \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

$R_Y \supset R_X \cap R_H$

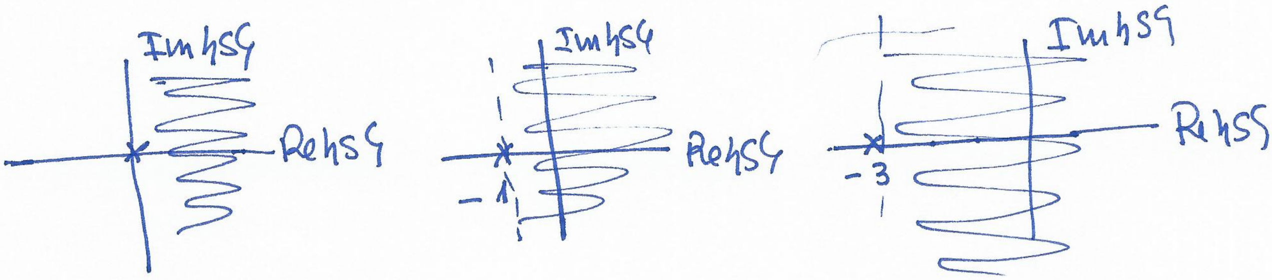
La región de convergencia de $H(s)$ debe ser compatible con las de ~~Y~~$Y(s)$ e $X(s)$.

Conocida la función de transferencia de H(s) vamos a calcular la señal de entrada que produce la salida w(t).

$$¿x(t)? \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow w(t) = 2u(t) - 3e^{-t}u(t) + e^{-3t}u(t)$$

La transformada de w(t) viene dada por:

$$W(s) = \frac{2}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s+3} \quad , \quad Re\{s\} > 0$$



$$W(s) = \frac{6}{s(s+1)(s+3)} \quad , \quad Re\{s\} > 0$$

Luego de la propiedad de convolución:

$$X(s) = \frac{W(s)}{H(s)} = \frac{\dfrac{6}{s(s+1)(s+3)}}{\dfrac{1}{(s+1)^2}} = \frac{6(s+1)^2}{s\cancel{(s+1)}(s+3)} =$$

$$= \frac{6(s+1)}{s(s+3)} \quad , \quad Re\{s\} > 0$$

Descomponemos en suma de fracciones parciales:

$$X(s) = \frac{6(s+1)}{s(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3}$$

$$A = s\,X(s)\Big|_{s=0} = \cancel{s}\,\frac{6(s+1)}{\cancel{s}(s+3)}\Big|_{s=0} = \frac{6}{3} = 2$$

$$B = (s+3)\,X(s)\Big|_{s=-3} = \cancel{(s+3)}\,\frac{6(s+1)}{s\cdot\cancel{(s+3)}}\Big|_{s=-3} = \frac{6(s+1)}{s}\Big|_{s=-3} = \frac{-12}{-3} = 4$$

luego $X(s) = \frac{2}{s} + \frac{4}{s+3}$, $Re\{s\} > 0$

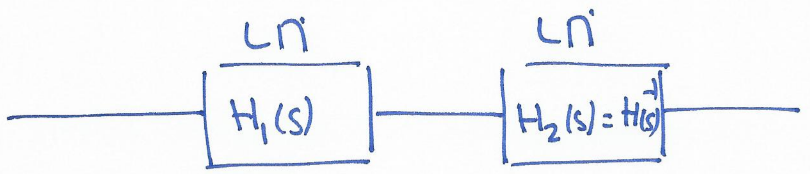
y por lo tanto:

$$x(t) = 2\,u(t) + 4\,e^{-3t}u(t)$$

PROBLEMA 4. Considerar dos sistemas LTI conectados en serie, S1 y S2, siendo S2 el sistema inverso al S1.

El sistema S1 es causal y estable y su función de transferencia $H_1(s)$ tiene un cero en $s=\frac{1}{2}$ y un polo en $s=-1$; el sistema S_2 es estable

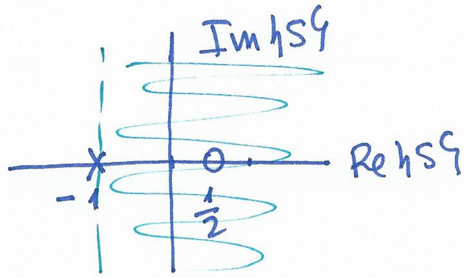
a) Encontrar las respuestas al impulso $h_1(t)$ y $h_2(t)$



S_1: causal
S_2: estable

Sabemos que la función de transferencia de S_1 tiene un polo $s=-1$ y un cero en $s=\frac{1}{2}$ luego la expresión algebraica de $H_1(s)$ será:

$$H_1(s)=\frac{s-\frac{1}{2}}{s+1}$$

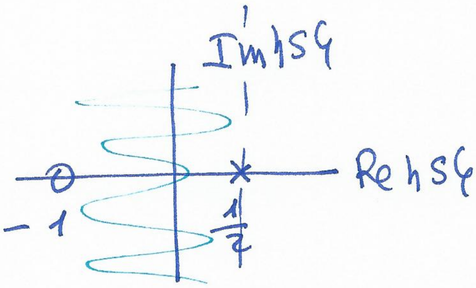


y como el sistema es causal y estable la región de convergencia es $Re\{s\}>-1$.

$$H_1(s)=\frac{s-\frac{1}{2}}{s+1}, \quad Re\{s\}>-1$$

El sistema S_2 es el inverso de S_1 y además es estable, luego la función de transferencia:

$$H_2(s) = \frac{s+1}{s-\frac{1}{2}}$$



y como S_2 es estable, $Re\{s\} < \frac{1}{2}$

$$H_2(s) = \frac{s+1}{s-\frac{1}{2}}, \quad Re\{s\} < \frac{1}{2}$$

Podemos calcular $h_1(t)$ y $h_2(t)$:

$$H_1(s) = \frac{s-\frac{1}{2}}{s+1} = 1 - \frac{3}{2}\,\frac{1}{s+1}, \quad Re\{s\} > -1$$

$$H_2(s) = \frac{s+1}{s-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{3}{2}\,\frac{1}{s-\frac{1}{2}}, \quad Re\{s\} < \frac{1}{2}$$

Luego:

$$h_1(t) = \delta(t) - \frac{3}{2} e^{-t} u(t)$$

$$h_2(t) = \delta(t) - \frac{3}{2} e^{t/2} u(-t)$$

b) Demostrar que $h_1(t) * h_2(t) = \delta(t)$

$$h_1(t) * h_2(t) = \left[\delta(t) - \frac{3}{2} e^{-t} u(t)\right] * \left[\delta(t) - \frac{3}{2} e^{t/2} u(-t)\right] =$$

$$= \delta(t) * \delta(t) - \frac{3}{2}\delta(t) * e^{t/2} u(-t) -$$

$$- \frac{3}{2} e^{-t} u(t) * \delta(t) + \frac{9}{4} e^{-t} u(t) * e^{t/2} u(-t) =$$

$$= \delta(t) - \frac{3}{2} e^{t/2} u(-t) - \frac{3}{2} e^{-t} u(t) +$$

$$+ \frac{9}{4} e^{-t} u(t) * e^{t/2} u(-t)$$

Calculamos el último sumando:

$$\frac{9}{4} e^{-t} u(t) * e^{t/2} u(-t) = \frac{9}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} u(\tau) \cdot e^{(t-\tau)/2} \cdot u(-t+\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{9}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} \cdot e^{t/2} \cdot e^{-\tau/2} u(\tau) \cdot u(-t+\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{9}{4} e^{t/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3\tau/2} u(\tau) \cdot u(-t+\tau)\, d\tau.$$

$$u(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases} ; \quad u(-t+\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > t \quad (-t+\tau > 0) \\ 0 & \tau < t \end{cases}$$

Luego para que la integral no se anule debe cumplirse que $\tau > 0$ y $\tau > t$ y en consecuencia el valor de la integral dependerá de que $t > 0$ ó $t < 0$

· Si $t > 0$:

$$\frac{9}{4} e^{t/2} \int_{t}^{\infty} e^{-3\tau/2}\, d\tau = -\frac{2}{3} \frac{9}{4} e^{t/2} \cdot e^{-3\tau/2} \Big|_{t}^{\infty} =$$

$$= -\frac{3}{2} e^{t/2} \left[0 - e^{-3t/2} \right] = \frac{3}{2} e^{-t}$$

· Si $t<0$

$$\frac{9}{4} e^{t/2} \int_0^{\infty} e^{-3\tau/2} d\tau = -\frac{2}{3}\frac{9}{4} e^{t/2} e^{-3\tau/2}\Big|_0^{\infty} =$$

$$= -\frac{3}{2} e^{t/2} [0-1] = \frac{3}{2} e^{t/2}$$

Finalmente:

$$h_1(t) * h_2(t) = \delta(t) - \cancel{\frac{3}{2} e^{t/2} u(-t)} - \cancel{\frac{3}{2} e^{-t} u(t)} +$$

$$+ \cancel{\frac{3}{2} e^{-t} u(t)} + \cancel{\frac{3}{2} e^{t/2} u(-t)} = \delta(t)$$

PROBLEMA 5. Considerar un sistema LTI cuya entrada x(t) y salida y(t) se relacionan mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

a) Calcular la expresión algebraica de la función de transferencia del sistema y dibujar los ceros y polos en el plano-s.

Trabajamos en el dominio transformado. Aplicamos la propiedad de linealidad y derivación.

$$s^2 Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s)$$

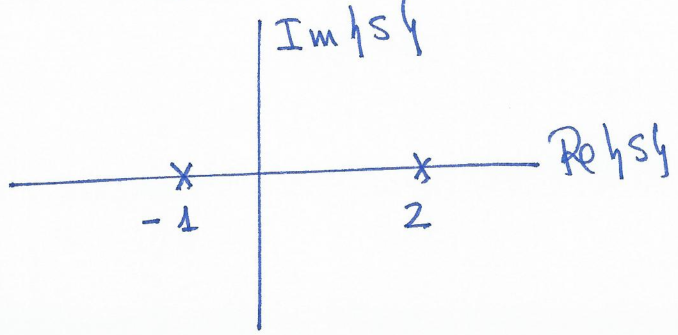
$$Y(s)[s^2 - s - 2] = X(s)$$

Por la propiedad de convolución:

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 - s - 2} = \frac{1}{(s-2)(s+1)}$$

Dibujamos el diagrama de polos y ceros:



b) Calcular la respuesta al impulso h(t)

Calculamos la transformada inversa utilizando el método de expansión en fracciones parciales:

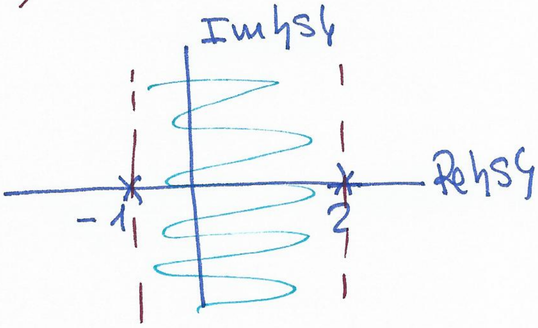
$$H(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1}$$

$$A = (s-2)H(s)\Big|_{s=2} = \frac{1}{s+1}\Big|_{s=2} = \frac{1}{3}$$

$$B \ (s+1)H(s)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{s-2}\Big|_{s=-1} = -\frac{1}{3}$$

$$H(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1}$$

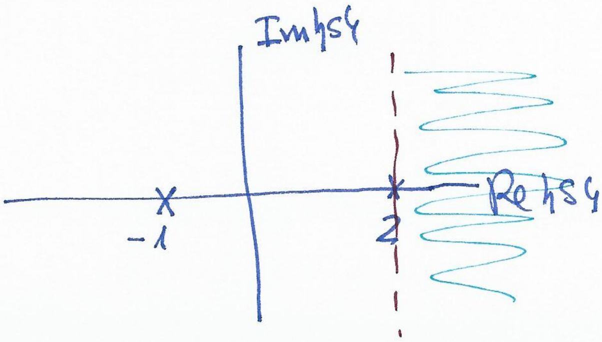
b1) Sistema estable



$-1 < Re\{s\} < 2$

$$h(t) = -\frac{1}{3}e^{+2t}u(-t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

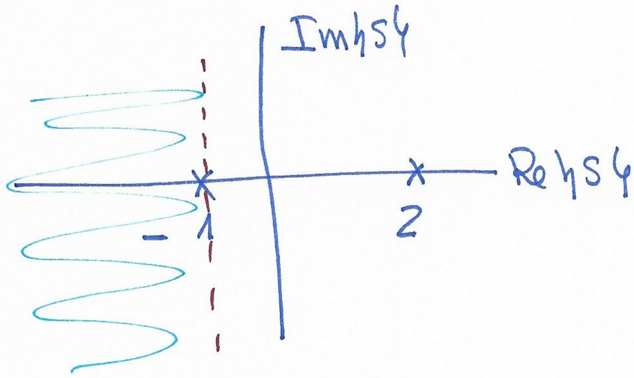
b2) Sistema causal



$Re\{s\} > +2$

$$h(t) = \frac{1}{3}e^{+2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

b3) Sistema ni causal ni estable.



$Re\{s\} < -1$

$$h(t) = -\frac{1}{3} e^{2t} u(-t) + \frac{1}{3} e^{-t} u(-t)$$

PROBLEMA 6. La señal de salida para un sistema causal S_1 viene dada por la expresión:

$$y(t) = e^{-2t}u(t)$$

Se sabe que la función de transferencia del mismo es:

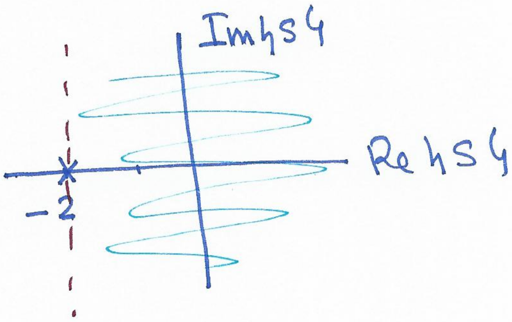
$$H(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

a) Encontrar las posibles entradas al sistema que pueden producir la salida $y(t)$

En primer lugar buscamos la transformada de Laplace de la salida del sistema LTI:

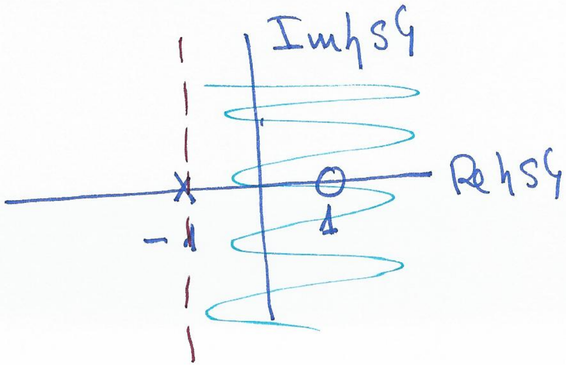
$$y(t) = e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = \frac{1}{s+2}, \quad Re\{s\} > -2$$

Dibujamos el diagrama de polos y ceros en el plano-s:



$$Y(s) = \frac{1}{s+2}, \quad Re\{s\} > -2$$

Conocemos la función de transferencia del sistema LTI causal.

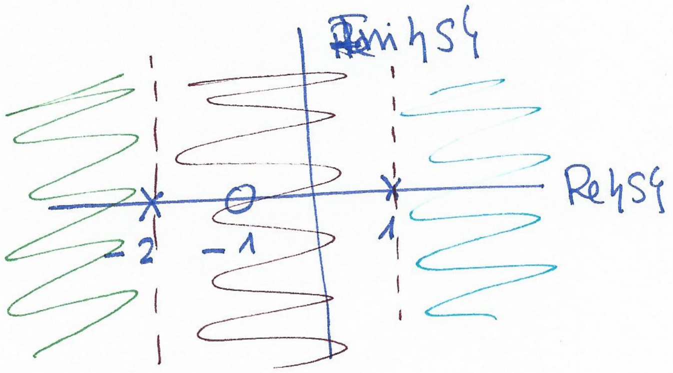


$$H(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad Re\{s\} > -1$$

Por la propiedad de convolución: $Y(s) = X(s) \cdot H(s)$

$$X(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{\frac{1}{s+2}}{\frac{s-1}{s+1}} = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}$$

que podemos representar en el plano-s.



$Re\{s\} > 1$

$Re\{s\} < -2$

$-2 < Re\{s\} < 1$

Las posibles ROC's deben ser compatible con $R_Y \supset R_X \cap R_H$. Por ello descartamos que $Re\{s\} < -2$ sea una posible ROC de $X(s)$ y nos quedamos con las dos regiones compatibles:

R_1 : $Re\{s\} > 1$

R_2 : $-2 < Re\{s\} < 1$

Para obtener las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ se expande $X(s)$ en fracciones parciales simples

$$X(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2}$$

$$A = (s-1)X(s)\Big|_{s=1} = \frac{s+1}{s+2}\Big|_{s=1} = \frac{2}{3}$$

$$B = (s+2)X(s)\Big|_{s=-2} = \frac{s+1}{s-1}\Big|_{s=-2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

y por lo tanto:

$$X(s) = \frac{2}{3} \frac{1}{s-1} + \frac{1}{3} \frac{1}{s+2}$$

R_1: $Re\{s\} > 1$

$$x(t) = \frac{2}{3} e^{t} u(t) + \frac{1}{3} e^{-2t} u(t)$$

R_2: $-2 < Re\{s\} < 1$

$$x(t) = -\frac{2}{3} e^{t} u(-t) + \frac{1}{3} e^{-2t} u(t)$$

b) Cuál es la entrada correcte si se sabe que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \, dt < \infty$$

Si se cumple que $x(t)$ es absolutamente integrable, entonces el sistema es estable pues la transformada de Fourier converge. Para que esto suceda, la única posibilidad es que la región de convergencia sea R_2 y entonces es:

$$x(t) = -\frac{2}{3} e^{t} u(-t) + \frac{1}{3} e^{-2t} u(t)$$

c) Se sabe que existe un sistema inverso a S_1 que llamaremos S_2, que es estable aunque no necesariamente causal. Encontrar la respuesta al impulso del sistema S_2.

El sistema S_1 tenía la siguiente función de transferencia

$$H(s) = \frac{s-1}{s+1} \quad Re\{s\} > -1$$

si existe un sistema inverso debe cumplirse que:

$$h(t) * h^{-1}(t) = \delta(t)$$

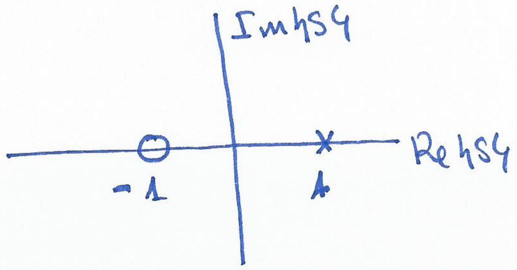
o equivalentemente, en el dominio transformado

$$H(s) \cdot H^{-1}(s) = 1$$

luego $H^{-1}(s) = \dfrac{1}{H(s)}$ será la función de transferencia del sistema inverso S_2:

$$H^{-1}(s) = \frac{1}{\frac{s-1}{s+1}} = \frac{s+1}{s-1}$$

que si lo representamos en el plano-s:



Posibles regiones convergencia:

$Re\{s\} > 1$

$Re\{s\} < 1$

Y como el sistema debe ser estable se debe cumplir que:

$$H^{-1}(s) = \frac{s+1}{s-1}, \quad Re\{s\}<1$$

$$\begin{array}{r|l} s+1 & s-1 \\ \hline -s+1 & 1 \\ \hline 2 & \end{array}$$

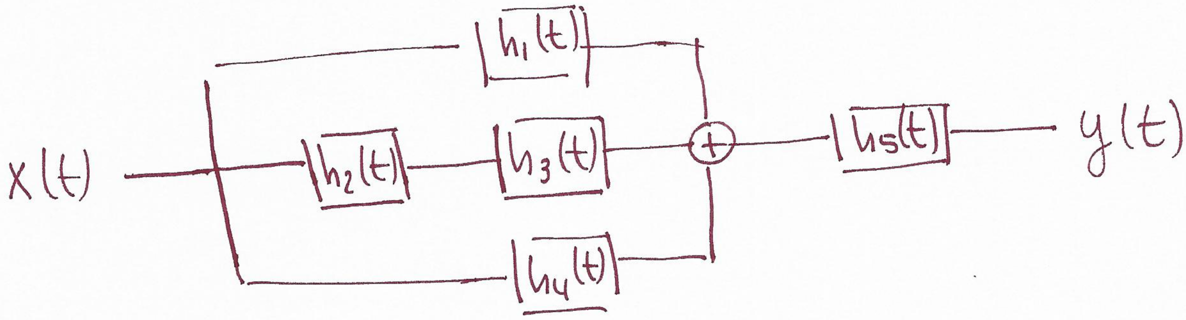
o equivalentemente

$$H^{-1}(s) = 1 + \frac{2}{s-1} \quad Re\{s\}<1$$

luego

$$h^{-1}(t) = \delta(t) - 2e^{t}u(-t)$$

PROBLEMA 7. Considerar el sistema representado en la figura



Las respuestas al impulso de cada uno de los subsistemas vienen dadas por:

$$h_1(t) = h_2(t) = e^{-2t}u(t) \qquad h_3(t) = e^{-t}u(t)$$

$$h_4(t) = \delta(t) \qquad h_5(t) = e^{-3t}u(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace:

a) Determinar si la respuesta al impulso h(t) del sistema equivalente es estable.

Para ver si el sistema es estable analizamos la función de transferencia H(s).

De las tablas obtenemos las funciones de transferencia de cada uno de los subsistemas:

$$h_1(t) = e^{-2t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} H_1(s) = \frac{1}{s+2}, \ \operatorname{Re}\{s\} > -2$$

$$h_2(t) = e^{-2t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} H_2(s) = \frac{1}{s+2}, \ \operatorname{Re}\{s\} > -2$$

$$h_3(t) = e^{-t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} H_3(s) = \frac{1}{s+1}, \ \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

$$h_4(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} H_4(s) = 1 \quad \forall s$$

$$h_5(t) = e^{-3t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} H_5(s) = \frac{1}{s+3}, \; Re\{s\} > -3$$

Recordamos que respuesta al impulso de sistemas en serie es la convolución de las respectivas respuestas al impulso y que si los sistemas están en paralelo su respuesta equivalente es la suma de las respuestas al impulso.

$$h(t) = \left[h_1(t) + (h_2(t) * h_3(t)) + h_4(t)\right] * h_5(t)$$

Teniendo en cuenta las propiedades de linealidad y convolución:

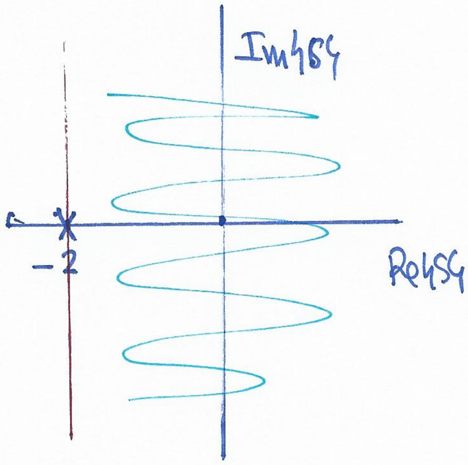
$$a x_1(t) + b x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} a X_1(s) + b X_2(s), \; ROC \supset R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s) \cdot X_2(s), \; ROC \supset R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

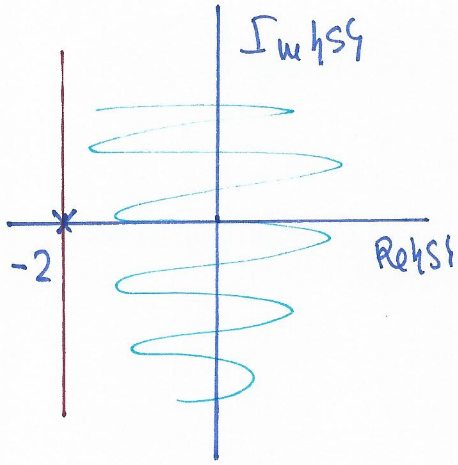
podemos escribir $H(s)$ como:

$$H(s) = \left[H_1(s) + H_2(s) \cdot H_3(s) + H_4(s)\right] \cdot H_5(s)$$

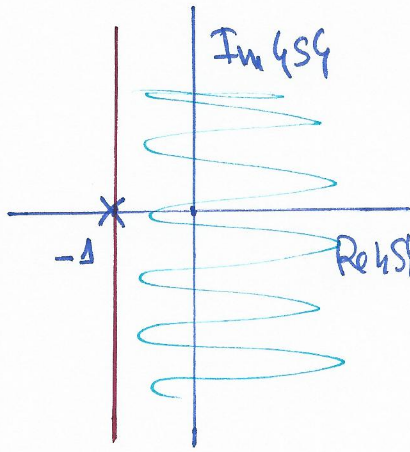
$$R_H \supset R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap R_5$$



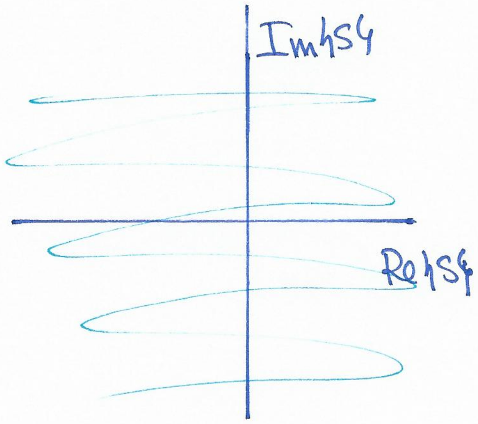
$H_1(s)$



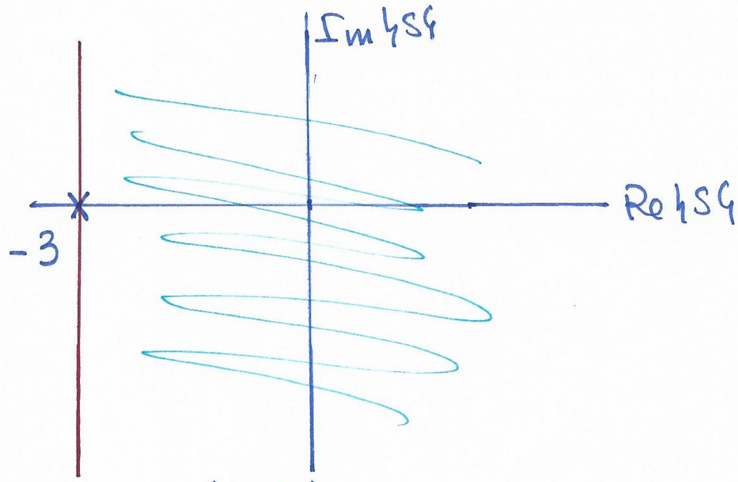
$H_2(s)$



$H_3(s)$



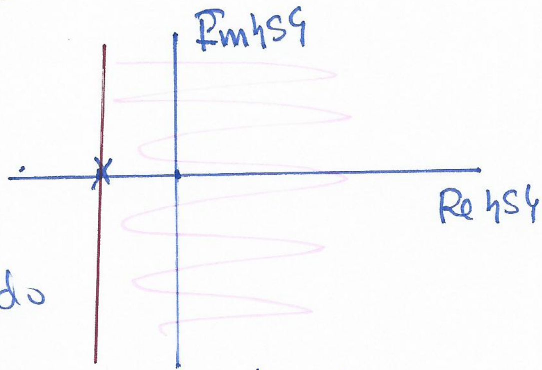
$H_4(s)$



$H_5(s)$

Luego $R_H = Re\{s\} > -1$

Y como el eje-$j\omega$ esté contenido en la ROC, el sistema es estable



$H(s)$

También podríamos analizarlo teniendo encuenta que cada bloque es estable y que en consecuencia el sistema equivalente también será estable

También se podría calcular $h(t)$ y comprobar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$

b) Calcular la función de transferencia y la respuesta al impulso del sistema equivalente.

$$H(s) = \left(\frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} + 1\right)\frac{1}{s+3} =$$

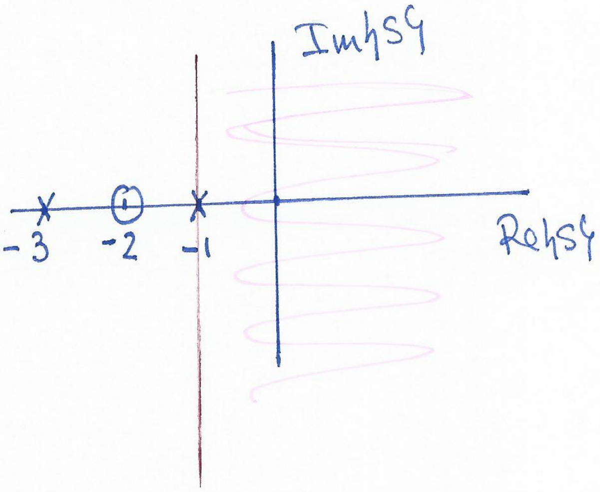
$$= \frac{(s+1)+1+(s+1)\cdot(s+2)}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{1}{s+3} =$$

$$= \frac{s+1+1+s^2+2s+s+2}{(s+1)(s+2)(s+3)} =$$

$$= \frac{s^2+4s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{(s+2)^{\cancel{2}}}{(s+1)\cancel{(s+2)}(s+3)} =$$

$$= \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}, \quad Re\{s\} > -1$$

Dibujamos el diagrama de polos y ceros:



$$H(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}, \quad Re\{s\} > -1$$

Para calcular $h(t)$ hacemos una expansión en fracciones parciales:

$$H(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$$

y calculamos las constantes A y B.

$$A = (s+1)\,H(s)\Big|_{s=-1} = (s+1)\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}\Big|_{s=-1} = \frac{1}{2}$$

$$B = (s+3)\,H(s)\Big|_{s=-3} = \cancel{(s+3)}\frac{s+2}{(s+1)\cancel{(s+3)}}\Big|_{s=-3} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$H(s) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+3}\ ,\quad Re\{s\} > -1$$

luego

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$$

PROBLEMA 8. La función de transferencia de un sistema LTI causal viene dada por la siguiente ecuación:

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

Determinar la respuesta del sistema $y(t)$ cuando la entrada al mismo viene dada por:

$$x(t) = e^{-|t|}, \quad -\infty < t < \infty$$

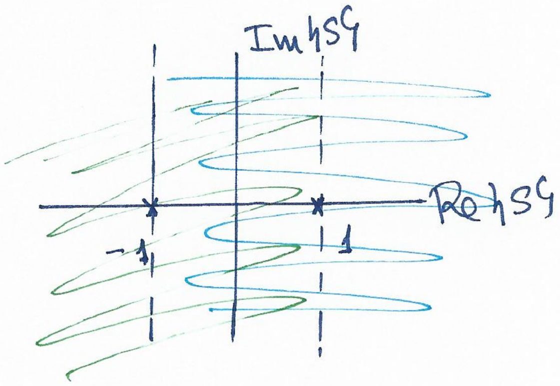
La señal de entrada puede escribirse como:

$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{t}u(-t)$$

luego

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1} = \frac{-2}{(s+1)(s-1)}$$

$$(\operatorname{Re}\{s\} > -1) \quad (\operatorname{Re}\{s\} < 1)$$

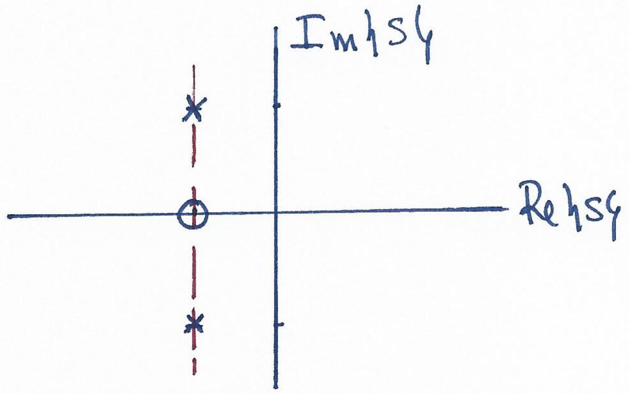


$$R_x \supset R_1 \cap R_2$$

$$-1 < \operatorname{Re}\{s\} < 1$$

Sabemos que $H(s) = \dfrac{s+1}{s^2+2s+2} = \dfrac{s+1}{(s+1-j)(s+1+j)}$

y como $h(t)$ es causal:



$\mathrm{Re}\{s\} > -1$

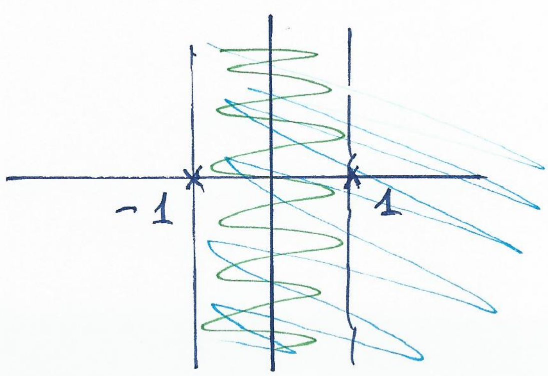
luego $H(s) = \dfrac{s+1}{s^2+2s+2}$, $\mathrm{Re}\{s\} > -1$

Sabemos que $y(t) = x(t) * h(t)$ y por la propiedad de convolución:

$$Y(s) = X(s)\,H(s)$$

$$Y(s) = \frac{-2}{(s+1)(s-1)} \cdot \frac{s+1}{s^2+2s+2} = \frac{-2}{(s^2+2s+2)(s-1)}$$

y la ROC de $Y(s)$ será:



$$ROC_Y \supset R_X \cap R_H$$

$$R_Y = -1 < \mathrm{Re}\{s\} < 1$$

Hacemos una expansión en suma de fracciones parciales:

$$Y(s) = \frac{-2}{(s^2+2s+2)(s-1)} = -\frac{2/5}{s-1} + \frac{\frac{2}{5}s+\frac{6}{5}}{s^2+2s+2}$$

$$Y(s) = -\frac{2/5}{s-1} + \frac{2}{5}\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{4}{5}\,\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

y teniendo en cuenta que $R_Y = -1 < \operatorname{Re}\{s\} < 1$

$$y(t) = \frac{2}{5}e^{t}u(-t) + \frac{2}{5}e^{-t}\cos t\,u(t) +$$
$$+\frac{4}{5}e^{-t}\sin(t)\,u(t).$$

$$\frac{-2}{(s^2+2s+2)(s-1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

$$A(s^2+2s+2) + (Bs+C)(s-1) = -2$$

$$As^2+2As+2A+Bs^2-Bs+Cs-C=-2$$

$$(A+B)s^2 + (2A-B+C)s + (2A-C) = -2$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ 2A-B+C=0 \\ 2A-C=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=-B \\ 2A+A+C=0 \Rightarrow 3A=-C \\ 2A+3A=-2 \Rightarrow A=-2/5 \end{array}$$

$$\begin{cases} A = -\dfrac{2}{5} \\[2ex] B = \dfrac{2}{5} \\[2ex] C = \dfrac{6}{5} \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{-\frac{2}{5}}{s-1} + \frac{\frac{2}{5}s + \frac{6}{5}}{s^2+2s+2} =$$

$$= \frac{-\frac{2}{5}}{s-1} + \frac{\frac{2}{5}s + \frac{6}{5}}{(s+1)^2+1} =$$

$$= \frac{-2/5}{s-1} + \frac{2}{5}\,\frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{4}{5}\,\frac{1}{(s+1)^2+1}$$